9 класс
Первый день

9.1. На прямой дороге стоят школа и дома Ани и Бори. Каждый день Аня выходит из дома в 8:00 и идет в школу. Однажды Боря выбежал из дома в школу в 8:00 и догнал Аню за 30 минут. На следующий день он выбежал в 8:10 и догнал Аню за 40 минут. В какое время ему надо выбежать, чтобы встретить Аню на выходе из её дома? (Скорость у Ани всегда постоянна, скорость Бори тоже постоянна.)

9.2. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) проведена биссектриса CD. На основании AC отмечена точка F так, что $BD = CF$. Точка E выбрали таким образом, что четырехугольник $CDEF$ – параллелограмм. Докажите, что $BE = BF$.

9.3. Даны квадратные трёхчлены $P(x)$ и $Q(x)$; обозначим $p_n = P(n)$ и $q_n = Q(n)$. Раз в минуту Саша рисует на координатной плоскости прямую: на первой минуте – прямую с уравнением $y = p_1x + q_1$, на второй – с уравнением $y = p_2x + q_2$, …, на i-й минуте – с уравнением $y = p_ix + q_i$. Через некоторое время Саша нашёл три нарисованные прямые, которые проходят через одну точку. Докажите, что все нарисованные прямые проходят через одну точку.

9.4. В каждой клетке доски 2×200 лежит по рублёвой монете. Даша и Соня играют, делая ходы по очереди, начинает Даша. За один ход можно выбрать любую монету и передвинуть её: Даша двигает монету на соседнюю по диагонали клетку, Соня – на соседнюю по стороне. Если две монеты оказываются в одной клетке, одна из них тут же снимается с доски и достаётся Соне. Соня может остановить игру в любой момент и забрать все полученные деньги. Какой наибольший выигрыш она может получить, как бы ни играла Даша

9.5. Найдите все такие пары целых чисел m и $n > 2$, что $((n-1)!-n)\cdot(n-2)! = m(m-2)$. Напомним, что $k! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k$ – произведение всех натуральных чисел от 1 до k.

10 класс
Первый день

10.1. Квадратный трёхчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ имеет два различных вещественных корня x_1 и x_2. Известно, что $f(x_1 + x_2) = 2025$. Чему может равняться c?

10.2. В стране 30 городов и 30 двусторонних авиалиний, соединяющих города по циклу. Верно ли, что можно добавить дополнительно ещё 10 авиалиний так, чтобы после этого из любого города можно было бы добраться до любого другого не более чем за 4 перелёта?

10.3. Положительные числа a, b, c таковы, что $a^2b + b^2c + c^2a = 2$ и $ab^2 + bc^2 + ca^2 = 4$. Докажите, что из чисел a, b, c какие-то два отличаются более чем на 2.

10.4. Можно ли на бесконечной клетчатой плоскости отметить конечное число узлов сетки так, чтобы было отмечено не менее двух точек, и для любой пары отмеченных точек нашлась бы отмеченная точка, равноудалённая от них?

10.5. Высоты BD *и* CE остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H, высоты треугольника ADE пересекаются в точке F, точка M – середина стороны BC. Докажите, что $BH + CH \geq 2FM$.

11 класс
Первый день

11.1. Существуют ли четыре попарно различных положительных числа a, b, c, d, при которых все четыре числа $\dfrac{a+b}{a-b}$, $\dfrac{b+c}{b-c}$, $\dfrac{c+d}{c-d}$, $\dfrac{d+a}{d-a}$ – целые?

11.2. Вещественные числа x, y, z таковы, что $2x > y^2 + z^2$, $2y > z^2 + x^2$, $2z > x^2 + y^2$. Докажите, что каждое из чисел x, y, z меньше 1.

11.3. В каждой клетке доски 2×200 лежит по рублёвой монете. Даша и Соня играют, делая ходы по очереди, Даша начинает. За один ход можно выбрать любую монету и передвинуть её: Даша двигает монету на соседнюю по диагонали клетку, а Соня – на соседнюю по стороне. Если две монеты оказываются в одной клетке, одна из них тут же снимается с доски и достаётся Соне. Соня может остановить игру в любой момент и забрать все полученные деньги. Какой наибольший выигрыш она может получить, как бы ни играла Даша?

11.4. Найдите все такие пары целых чисел m и $n > 2$, что $((n-1)!-n)\cdot(n-2)! = m(m-2)$. Напомним, что $k! = 1\cdot2\cdot\ldots\cdot k$ – произведение всех натуральных чисел от 1 до k.

11.5. В треугольнике ABC с углом 100° при вершине A медианы BK и CN пересекаются в точке M. Прямая, проходящая через точку M и параллельная BC, пересекает описанную окружность треугольника AKN в точках P *и* Q. Найдите сумму углов BPC *и* BQC.