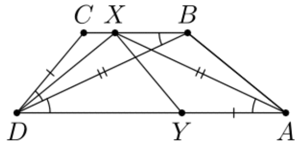
XVII МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ИМЕНИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

Решения заданий регионального этапа, 2 день

6. *В начале года каждому из 150 бойцов лиги смешанных единоборств был присвоен номер от 1 до 150. В течение года было проведено 149 поединков: первого со вторым, второго с третьим, …, 149-го со 150-м. В конце года был составлен список бойцов, победивших во всех поединках, в которых они участвовали в прошедшем году. Могли ли в этом списке оказаться и все бойцы с номерами кратными 17, и все бойцы с номерами кратными 20?* (Методсовет)

Ответ. Не могли. **Решение**. Бойцы с номерами $119 = 17\cdot7$ и $120 = 20\cdot6$ не могут одновременно находиться в списке, потому что иначе в их поединке оба они должны были бы победить.

7. *В трапеции $ABCD$ диагональ BD является биссектрисой угла ADC. На основаниях BC и AD выбрали точки X и Y соответственно таким образом, что $AX = BD$ и $AY = CD$. Оказалось, что $\angle BCD = 130°$. Найдите величину угла AXY.* (С. Берлов)



Ответ. 25°. **Решение**. Так как $AX = BD$, $ABXD$ — равнобедренная трапеция. Поэтому $\angle XAD = \angle BDA = \angle BDC$. Следовательно, треугольники AXY и BDC равны по двум сторонам и углу между ними, откуда $\angle AXY = \angle CBD = \angle BDA = (180°–\angle BCD)/2 = 25°$.

8. *На экране калькулятора горит число 41. За одну операцию можно увеличить или уменьшить число на экране на 33 или 34. При этом запрещается получать числа, меньшие 1, и числа, большие 99. Через 2025 операций на экране оказалось число 50. Докажите, что в некоторый момент на экране было число 67.* (И. Рубанов, А. Кузнецов)

Первое решение. Назовем натуральные числа от 34 до 66 *средними*, а от 1 до 33 и от 67 до 99 — *крайними*. Заметим, что каждая операция, кроме операции прибавления 34 к 33 и вычитания 34 из 67 (назовем эти две операции *особыми*) превращает среднее число в крайнее, а крайнее — в среднее. Исходное число 41 — среднее. Поэтому если особые операции не используются, то после каждой нечетной по счету операции, в том числе и после 2025-й, на экране должно находиться крайнее число. Но итоговое число 50 — среднее. Значит, хотя бы раз была использована особая операция, и перед ней или после неё на экране было число 67. **Второе решение**. Заметим, что после любых двух сделанных подряд операций число на экране по модулю 67 изменяется не более, чем на единицу. После первой операции оно будет по модулю 67 сравнимо с 7 или 8, а в конце должно стать равным 50. Если по пути оно пройдет через 0, то задача решена. Если же нет, то в какой-то момент оно после двух последовательных операций увеличится с 33 до 34. Но тогда после первой из этих двух операций оно станет сравнимо с 0, что и требовалось.

9. *На доску записали несколько (больше одного) последовательных натуральных чисел. Могло ли так случиться, что и сумма всех четных выписанных чисел — квадрат натурального числа, и сумма всех нечетных выписанных чисел — квадрат натурального числа?* (А. Кузнецов)

Ответ. Не могло. **Решение**. Пусть выписано $2k$ чисел, начиная с числа n. Тогда одна из двух указанных в условии сумм равна $S_1 = n+(n+2)+\ldots+(n+2k–1) = (n+(n+2k–2))\cdot k/2 = (n+k–1)\cdot k$, а другая равна $S_2 = (n+1)+\ldots+(n+2k–1) = (n+1+(n+2k–1))\cdot k/2 = (n+k)\cdot k$. Если же выписано $2k+1$ чисел, начиная с числа n, то одна из сумм равна $S_1 = (n+1)+(n+3)+\ldots+(n+2k–1) = (n+1+(n+2k–1))\cdot k/2 = (n+k)\cdot k$, а другая — $S_2 = n+(n+2)+\ldots+(n+2k) = (n+(n+2k))\cdot(k+1)/2 = (n+k)\cdot(k+1)$. В обоих случаях частное S_2/S_1 равно отношению $(m+1)/m$ двух последовательных натуральных чисел, где $m = n+k–1$, если выписано $2k$ чисел, и $m = k$, если выписано $2k+1$ чисел.

Допустим, нашлись такие n и k, что $S_1 = u^2$, $S_2 = v^2$, где u и v — натуральные числа. Тогда по доказанному есть такое натуральное m, что $(m+1)u^2 = m\,v^2$ (*). Можно считать, что числа u и v взаимно просты — иначе поделим u и v на их НОД, и равенство (*) сохранится. Значит, $m = tu^2$. Число t должно быть делителем числа $m+1$, и так как m и $m+1$ взаимно просты, то $t = 1$, и $m = u^2$. Аналогично, $m+1 = v^2$. Но тогда $v^2 = u^2+1$, что невозможно при натуральных u и v, откуда и следует ответ.

Замечание. В случае, когда выписано $2k$ чисел, есть более простое альтернативное доказательство.

В этом случае $S_2 = S_1+k$. При этом $S_1 \geq 1+\ldots+(2k–1) = k^2$, то есть если $S_1 = m^2$, то $m \geq k$. Но тогда $m^2 < S_2 = m^2+k \leq m^2+m < (m+1)^2$, и S_2 не может быть квадратом натурального числа.

10. *На столе стоят 12 сосудов, выстроенных в 4 ряда по 3 сосуда в каждом. В каждый сосуд налито некоторое (возможно, нулевое) количество воды. Известно, что суммарное количество воды в каждом ряду равно 1 л. При каких значениях* α *можно утверждать, что на столе найдутся два сосуда, количества воды в которых отличаются не более чем на* α *л?* (И. Богданов)

Ответ. При всех $\alpha \geq 1/17$. **Решение**. Пусть таких сосудов нет. Пусть $k_0 \leq k_1 \leq \ldots \leq k_{11}$ — количества воды в сосудах; назовём *индексом* сосуда его номер в этом ряду. Заметим, что $k_0 \geq 0$ и $k_i > \alpha \cdot i$ при $i \geq 1$. Сумма всех индексов равна 0+1+…+11 = 66, поэтому найдётся ряд, сумма индексов в котором не меньше, чем 17. Тогда суммарное количество воды в этом ряду больше 17α, откуда $\alpha < 1/17$. Поэтому все $\alpha \geq 1/17$ подходят.

Если распределить воду по рядам как 13/17+1/17+3/17, 10/17+2/17+5/17, 9/17+8/17+0, 7/17+6/17+4/17, то количества воды в любых двух сосудах будут отличаться минимум на 1/17. Есть и другие подобные примеры. Поэтому все α, меньшие 1/17, не подходят.