

9 класс

Первый день

- 9.1. У Олега есть набор из 2024 различных клетчатых прямоугольников размеров $1 \times 1, 1 \times 2, 1 \times 3, \dots, 1 \times 2024$ (по одному прямоугольнику каждого размера). Может ли он, выбрав некоторые из них, составить какой-нибудь клетчатый квадрат площади больше 1?
- 9.2. На координатной плоскости нарисована парабола $y = x^2$. Для данного числа $k > 0$ рассматриваются трапеции, вписанные в эту параболу (то есть все вершины трапеции лежат на параболе), у которых основания параллельны оси абсцисс, а произведение длин оснований равно k . Докажите, что диагонали всех таких трапеций проходят через одну точку.
- 9.3. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Для игры в настольный теннис навьлет всех жителей острова разделили на две команды A и B , причём в A жителей было больше, чем в B . Начали игру два игрока разных команд; после каждой партии проигравший игрок навсегда выходил из игры, а его заменял другой (ещё не игравший) член его команды. Проиграла команда, все члены которой вышли из игры. После турнира каждого члена команды A спросили: «Правда ли, что в какой-то игре ты проиграл лжецу?», а каждого члена команды B спросили: «Правда ли, что ты выиграл хотя бы у двух рыцарей?». Все ответы оказались утвердительными. Какая команда победила – A или B ?
- 9.4. В ряд выписаны по одному разу все натуральные числа от 1 до 1000 в каком-то порядке. Докажите, что можно выбрать несколько стоящих подряд выписанных чисел, сумма которых больше 100000, но не превосходит 100500.
- 9.5. Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$). На продолжениях боковых сторон AB и BC за точку B отмечены D и E соответственно, а на основании AC отмечена точка F , причем $AC = DE$ и $\angle CFE = \angle DEF$. Докажите, что $\angle ABC = 2\angle DFE$.

9 класс

Первый день

- 9.1. У Олега есть набор из 2024 различных клетчатых прямоугольников размеров $1 \times 1, 1 \times 2, 1 \times 3, \dots, 1 \times 2024$ (по одному прямоугольнику каждого размера). Может ли он, выбрав некоторые из них, составить какой-нибудь клетчатый квадрат площади больше 1?
- 9.2. На координатной плоскости нарисована парабола $y = x^2$. Для данного числа $k > 0$ рассматриваются трапеции, вписанные в эту параболу (то есть все вершины трапеции лежат на параболе), у которых основания параллельны оси абсцисс, а произведение длин оснований равно k . Докажите, что диагонали всех таких трапеций проходят через одну точку.
- 9.3. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Для игры в настольный теннис навьлет всех жителей острова разделили на две команды A и B , причём в A жителей было больше, чем в B . Начали игру два игрока разных команд; после каждой партии проигравший игрок навсегда выходил из игры, а его заменял другой (ещё не игравший) член его команды. Проиграла команда, все члены которой вышли из игры. После турнира каждого члена команды A спросили: «Правда ли, что в какой-то игре ты проиграл лжецу?», а каждого члена команды B спросили: «Правда ли, что ты выиграл хотя бы у двух рыцарей?». Все ответы оказались утвердительными. Какая команда победила – A или B ?
- 9.4. В ряд выписаны по одному разу все натуральные числа от 1 до 1000 в каком-то порядке. Докажите, что можно выбрать несколько стоящих подряд выписанных чисел, сумма которых больше 100000, но не превосходит 100500.
- 9.5. Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$). На продолжениях боковых сторон AB и BC за точку B отмечены D и E соответственно, а на основании AC отмечена точка F , причем $AC = DE$ и $\angle CFE = \angle DEF$. Докажите, что $\angle ABC = 2\angle DFE$.

10 класс

Первый день

- 10.1. У Олега есть набор из 2024 различных клетчатых прямоугольников размеров 1×1 , 1×2 , 1×3 , ..., 1×2024 (по одному прямоугольнику каждого размера). Может ли он, выбрав некоторые из них, составить какой-нибудь клетчатый квадрат площади больше 1?
- 10.2. На координатной плоскости нарисована парабола $y = x^2$. Для данного числа $k > 0$ рассматриваются трапеции, вписанные в эту параболу (то есть все вершины трапеции лежат на параболе), у которых основания параллельны оси абсцисс, а произведение длин оснований равно k . Докажите, что продолжения боковых сторон всех таких трапеций проходят через одну точку.
- 10.3. По кругу стоят 100 белых точек. Зоя и Петя красят по очереди по одной ещё не покрашенной точке в зеленый или синий цвет, начинает Зоя. Зоя хочет, чтобы в итоге оказалось как можно больше пар разноцветных соседних точек, а Петя – чтобы оказалось как можно меньше таких пар. Какое наибольшее число пар разноцветных соседних точек Зоя может гарантировать себе независимо от игры Пети?
- 10.4. В ряд выписаны по одному разу все натуральные числа от 1 до 1000 в каком-то порядке. Докажите, что можно выбрать несколько стоящих подряд выписанных чисел, сумма которых больше 100000, но не превосходит 100500.
- 10.5. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ перпендикулярны и пересекаются в точке O . Центры вписанных окружностей треугольников ABC , BCD , CDA , DAB являются вершинами выпуклого четырёхугольника, периметр которого равен P . Докажите, что сумма радиусов вписанных окружностей треугольников AOB , BOC , COD , DOA не превосходит $P/2$.

10 класс

Первый день

- 10.1. У Олега есть набор из 2024 различных клетчатых прямоугольников размеров 1×1 , 1×2 , 1×3 , ..., 1×2024 (по одному прямоугольнику каждого размера). Может ли он, выбрав некоторые из них, составить какой-нибудь клетчатый квадрат площади больше 1?
- 10.2. На координатной плоскости нарисована парабола $y = x^2$. Для данного числа $k > 0$ рассматриваются трапеции, вписанные в эту параболу (то есть все вершины трапеции лежат на параболе), у которых основания параллельны оси абсцисс, а произведение длин оснований равно k . Докажите, что продолжения боковых сторон всех таких трапеций проходят через одну точку.
- 10.3. По кругу стоят 100 белых точек. Зоя и Петя красят по очереди по одной ещё не покрашенной точке в зеленый или синий цвет, начинает Зоя. Зоя хочет, чтобы в итоге оказалось как можно больше пар разноцветных соседних точек, а Петя – чтобы оказалось как можно меньше таких пар. Какое наибольшее число пар разноцветных соседних точек Зоя может гарантировать себе независимо от игры Пети?
- 10.4. В ряд выписаны по одному разу все натуральные числа от 1 до 1000 в каком-то порядке. Докажите, что можно выбрать несколько стоящих подряд выписанных чисел, сумма которых больше 100000, но не превосходит 100500.
- 10.5. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ перпендикулярны и пересекаются в точке O . Центры вписанных окружностей треугольников ABC , BCD , CDA , DAB являются вершинами выпуклого четырёхугольника, периметр которого равен P . Докажите, что сумма радиусов вписанных окружностей треугольников AOB , BOC , COD , DOA не превосходит $P/2$.

11 класс

Первый день

- 11.1. У Олега есть набор из 2024 различных клетчатых прямоугольников размеров 1×1 , 1×2 , 1×3 , ..., 1×2024 (по одному прямоугольнику каждого размера). Может ли он, выбрав некоторые из них, составить какой-нибудь клетчатый квадрат площади больше 1?
- 11.2. Пусть $x_1 < x_2 < \dots < x_{2024}$ – возрастающая последовательность натуральных чисел. При $i = 1, 2, \dots, 2024$ обозначим $p_i = \left(x_1 - \frac{1}{x_1}\right) \left(x_2 - \frac{1}{x_2}\right) \dots \left(x_i - \frac{1}{x_i}\right)$. Какое наибольшее количество натуральных чисел может содержаться среди чисел $p_1, p_2, \dots, p_{2024}$?
- 11.3. По кругу стоят 100 белых точек. Зоя и Петя красят по очереди по одной ещё не покрашенной точке в зеленый или синий цвет, начинает Зоя. Зоя хочет, чтобы в итоге оказалось как можно больше пар разноцветных соседних точек, а Петя – чтобы оказалось как можно меньше таких пар. Какое наибольшее число пар разноцветных соседних точек Зоя может гарантировать себе независимо от игры Пети?
- 11.4. На отрезке XU как на диаметре построена полуокружность и выбрана произвольная точка Z на этом отрезке. Девять лучей из точки Z делят развернутый угол XZY на 10 равных частей и пересекают полуокружность в точках A_1, A_2, \dots, A_9 соответственно (в порядке обхода от X к Y). Докажите, что сумма площадей треугольников A_2ZA_3 и A_7ZA_8 равна площади четырехугольника $A_2A_3A_7A_8$.
- 11.5. Уравнение $t^4 + at^3 + bt^2 = (a + b)(2t - 1)$ имеет положительные решения $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$. Докажите, что $t_1t_4 > t_2t_3$.

11 класс

Первый день

- 11.1. У Олега есть набор из 2024 различных клетчатых прямоугольников размеров 1×1 , 1×2 , 1×3 , ..., 1×2024 (по одному прямоугольнику каждого размера). Может ли он, выбрав некоторые из них, составить какой-нибудь клетчатый квадрат площади больше 1?
- 11.2. Пусть $x_1 < x_2 < \dots < x_{2024}$ – возрастающая последовательность натуральных чисел. При $i = 1, 2, \dots, 2024$ обозначим $p_i = \left(x_1 - \frac{1}{x_1}\right) \left(x_2 - \frac{1}{x_2}\right) \dots \left(x_i - \frac{1}{x_i}\right)$. Какое наибольшее количество натуральных чисел может содержаться среди чисел $p_1, p_2, \dots, p_{2024}$?
- 11.3. По кругу стоят 100 белых точек. Зоя и Петя красят по очереди по одной ещё не покрашенной точке в зеленый или синий цвет, начинает Зоя. Зоя хочет, чтобы в итоге оказалось как можно больше пар разноцветных соседних точек, а Петя – чтобы оказалось как можно меньше таких пар. Какое наибольшее число пар разноцветных соседних точек Зоя может гарантировать себе независимо от игры Пети?
- 11.4. На отрезке XU как на диаметре построена полуокружность и выбрана произвольная точка Z на этом отрезке. Девять лучей из точки Z делят развернутый угол XZY на 10 равных частей и пересекают полуокружность в точках A_1, A_2, \dots, A_9 соответственно (в порядке обхода от X к Y). Докажите, что сумма площадей треугольников A_2ZA_3 и A_7ZA_8 равна площади четырехугольника $A_2A_3A_7A_8$.
- 11.5. Уравнение $t^4 + at^3 + bt^2 = (a + b)(2t - 1)$ имеет положительные решения $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$. Докажите, что $t_1t_4 > t_2t_3$.