XVI МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ИМЕНИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

Решения заданий регионального этапа и критерии оценки, 2 день

6. *Найдутся ли такие 15 идущих подряд целых чисел, что сумма четырех наименьших из них равна сумме одиннадцати остальных?*(И. Рубанов)

Ответ. Нет. **Первое решение**. Пусть x— наименьшее из данных чисел. По условию должно выполняться равенство $x+(x+1)+(x+2)+(x+3) = (x+4)+(x+5)+\ldots+(x+14)$. После приведения подобных членов получаем $7x+93 = 0$, откуда $x = -93/7$. Значение x получилось нецелым. Значит, искомых 15 целых чисел не существует. **Второе решение**. Вычтем из суммы четырех наименьших из наших чисел сумму четырёх следующих за ними. Получится –16. Поэтому сумма семи оставшихся чисел должна также равняться –16. Но это сумма семи идущих подряд целых чисел, и она должна делиться на 7. Противоречие.

Критерии. Только ответ «нет» — *0 баллов*.

При решении, аналогичном нашему первому, составление уравнения без дальнейшего содержательного продвижения стоит *1 балл*.

7. *Петя утверждает, что он написал 10 подряд идущих натуральных чисел, и оказалось, что среди всех цифр, используемых в этих числах, каждая цифра (от 0 до 9) встречается одно и то же количество раз. Могли ли слова Пети оказаться правдой?* (П. Кожевников)

Ответ. Могли. **Решение**. Например, в числах от 10234567890 до 10234567899 все цифры встречаются по 11 раз.

Критерии. Верный пример — *7 баллов*, нет верного примера — *0 баллов*.

8. *По окружности расставили 2023 числа, наименьшее из которых равно 0, а наибольшее равно N. Для каждых двух чисел, стоящих на окружности рядом, на доску выписали их сумму. Оказалось, что любые два числа на доске отличаются не более чем на 1. Каково наибольшее возможное значение N?* (П. Кожевников)

Ответ. 1011. **Решение**. Оценка. Пусть на окружности идут подряд числа a, b и c. По условию $|(a+b)-(b+c)| = |a-c| \le 1$. Значит, любые два числа, стоящие на окружности через одно, отличаются не более чем на 1. Пойдем от нуля по кругу с шагом 2. Через 2023 шага мы вернемся в нуль, обойдя все числа. Поскольку на каждом шаге число могло увеличиться максимум на 1, число, большее 1011, может появиться не ранее 1012-го шага. Но в таком случае, после этого числа будет сделано не более 1011 шагов, на каждом из которых число может уменьшиться максимум на 1. Следовательно, в конце получится положительное число. Противоречие. Пример. Пронумеруем места для чисел по часовой стрелке числами 0, 1, 2, …., 2022. На места 0, 2, …, 2022 поставим числа 0, 1, 2, …, 1011, а на места 1, 3, 5, …, 2021 — числа 1011, 1010, 1009, …, 1 соответственно. Сумма чисел, стоящих на местах $2n$ и $2n+1$, при любом n от 0 до 1011 будет равна 1011, а сумма чисел, стоящих на местах $2n-1$ и $2n$, будет при любом n от 1 до 1011 будет равна 1012.

Критерии. Только ответ — *0 баллов*.

Только ответ с верным примером — *2 балла*.

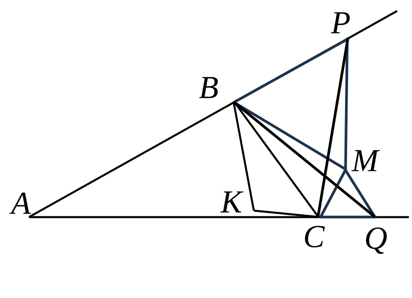
Только ответ с верной оценкой — *4 балла*.

9. *Внутри треугольника ABC выбрана точка K такая, что $\angle KCB+\angle ACB = \angle KBC+\angle ABC = 120°$. На продолжении стороны AB за точку B выбрана точка P, а на продолжении стороны AC за точку C — точка Q таким образом, что BK = BP и CK = CQ. Докажите, что BQ = CP.* (С. Берлов)

Решение. Пусть точка M симметрична точке K относительно прямой BC. Тогда

$\angle MBP = 180°-(\angle MBC+\angle ABC) = 180°-(\angle KBC+\angle ABC) = 180°-120°= 60°$.

Поскольку $BM = BK = BP$, треугольник PBM — равносторонний. Аналогично доказывается, что треугольник QCM — равносторонний. Значит, $PM = BM$ и $CM = QM$. Кроме того, $\angle PMC = \angle BMC+60° = \angle BMQ$. Таким образом, треугольники PMC и BMQ равны по двум сторонам и углу между ними, и отрезки BQ и CP равны как их соответственные стороны.

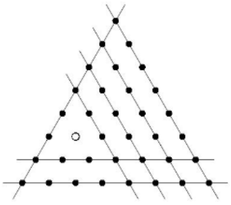


Критерии. Рассмотрена точка M, симметричная тоске K относительно прямой BC, и замечено, что углы ABM и ACM равны 120 градусам, дальнейшего содержательного продвижения нет — *1 балл*.

10. *Правильный треугольник T со стороной 111 разбит на правильные треугольники со стороной 1. Все вершины этих треугольников, кроме находящейся в центре T, отмечены. Назовём множество отмеченных точек* ***линейным****, если все его точки лежат на одной прямой, параллельной стороне треугольника T. Сколько существует способов разбить все отмеченные точки на 111 линейных множеств?* (И. Богданов)

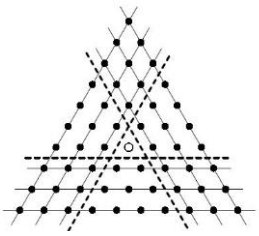
Ответ. $2^{3\cdot 37^2}=2^{4107}$. **Решение**. Рассмотрим равносторонний треугольник со стороной k, разобьём его на правильные треугольнички со стороной 1 и отметим все вершины этих треугольничков; полученную конструкцию назовём k-*треугольником*. В дальнейшем под *прямыми* мы всегда будем понимать прямые, параллельные сторонам этого треугольника и проходящие через хотя бы одну отмеченную точку.

Лемма. *Пусть A — отмеченная точка в k-треугольнике. Тогда существует единственный способ провести k прямых так, что все отмеченные точки, кроме, возможно, A, покрыты этими прямыми. Именно, для каждой стороны k-треугольника надо провести все прямые, параллельные ей и лежащие между этой стороной и точкой A (включая саму сторону, но исключая прямую, содержащую A).*



Доказательство. Проведем индукцию по k. База при $k = 1$ проверяется легко: надо провести прямую, содержащую две оставшихся точки, кроме A. Для перехода рассмотрим сторону k-треугольника, на которой не лежит A. Если прямая, содержащая эту сторону, не проведена, то все $k+1$ отмеченных точек на этой прямой должны быть покрыты различными прямыми; это невозможно, так как прямых k. Значит, эта прямая проведена. Выкинув её и точки k-треугольника, лежащие на ней, получаем (k–1)-треугольник, в котором проведено k–1 прямых с теми же условиями. Осталось применить предположение индукции.

Перейдём к задаче. Рассмотрим одно из разбиений на линейные множества. Для каждого множества проведём прямую, его содержащую. Тогда эти прямые покрыли все отмеченные точки 111-треугольника, кроме, возможно, его центра A. Значит, эти прямые устроены так, как описано в лемме, и для любого разбиения этот набор прямых один и тот же.



Заметим, что наш 111-треугольник разбился на 6 областей: три «ромба» в углах, состоящих из точек, покрытых нашими прямыми дважды, и три «трапеции» у сторон, в которых каждая точка покрыты одной прямой (см. рисунок справа). Тогда каждая точка в «трапеции» относится к множеству, лежащему на этой прямой; каждую же точку в «ромбе» можно отнести к любому из двух множеств, лежащих на проходящих через неё прямых. Все такие выборы можно сделать независимо друг от друга. Поскольку в каждом из трёх «ромбов» всего 37^2 точек, получаем, что требуемых разбиений ровно $2^{3\cdot 37^2}$.

Критерии. Доказано только, что все точки, кроме одной, нельзя покрыть менее чем 111 прямыми — 1 *балл*.

Доказана только лемма, а подсчёт проведён неверно — *4 балла*.

Лемма используется без доказательства — *не более 3 баллов*.

В верном в целом подсчёте допущена ошибка на ±1 (например, утверждается, что в ромбах по 36^2 или по 38^2 точек) — *снимается 1 балл*.