10 класс

Задача №1. Хитрая пушка

Пусть ускорение свободного падения равняется g, а выстрел производится под углом α к вертикали со скоростью $v_0(\alpha)$. Тогда имеем:

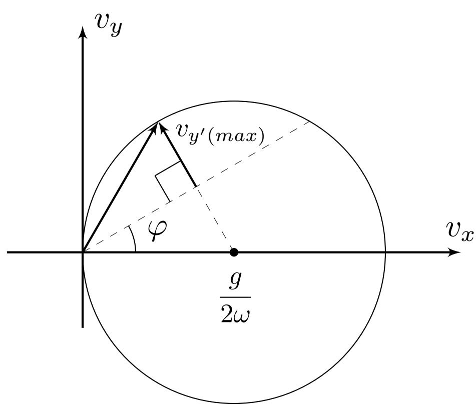
$$a_n = \omega v_0(\alpha) = g_n = g\sin\alpha \Rightarrow v_0(\alpha) = \frac{g\sin\alpha}{\omega}.$$

Далее можно решать задачу четырьмя способами.

Первое способ:

Введём координатную ось y', направленную перпендикулярно поверхности горки. Проекция ускорения снаряда на ось y' равна $g_{y'} = -g\cos\varphi$. Тогда для времени полёта снаряда имеем:

$$t = -\frac{2v_{0y'}}{g_{y'}} = \frac{2v_{0y'}}{g\cos\varphi}.$$



Максимально возможному времени полёта снаряда соответствует максимальное значение $v_{0y'}$. Введём систему координат Oxy с началом в месте расположения пушки, где ось x направлена вправо, а ось y – вертикально вверх. Тогда:

$$v_0 = \frac{g\sin\alpha}{\omega} = \frac{g}{\omega}\frac{v_{0x}}{v_0} \Rightarrow v^2 = v_{0x}^2 + v_{0y}^2 = \frac{gv_{0x}}{\omega},$$

откуда получаем:

$$\left(v_{0x} - \frac{g}{2\omega}\right)^2 + v_{0y}^2 = \left(\frac{g}{2\omega}\right)^2.$$

Таким образом, геометрическое место точек конца вектора скорости $\vec{v}_0$ представляет собой окружность (см.рис). Из геометрии рисунка следует, что максимальное время полёта соответствует максимально возможному значению $v_{0y'}$, которое достигается, когда конец вектора скорости лежит на перпендикуляре, проведённом к направлению поверхности горки из центра окружности. Получаем:

$$v_{0y'(max)} = \frac{g(1-\sin\varphi)}{2\omega},$$

откуда:

$$t_{max} = \frac{1-\sin\varphi}{\omega\cos\varphi} \approx 1.15 \text{ с.}$$

Второй способ:

Проекция начальной скорости снаряда на ось y' равна $v_{0y'} = v_0\cos(\alpha+\varphi)$. Тогда для времени полёта снаряда имеем:

$$t = \frac{2v_0(\alpha)\cos(\alpha+\varphi)}{g\cos\varphi} = \frac{2\sin\alpha\cos(\alpha+\varphi)}{\omega\cos\varphi}.$$

Воспользуемся преобразованием произведения тригонометрических функций в сумму:

$$2\sin\alpha\cos(\alpha+\varphi) = \sin(\alpha-(\alpha+\varphi)) + \sin(\alpha+(\alpha+\varphi)) = \sin(2\alpha+\varphi) - \sin\varphi.$$

Максимальное значение $\sin(2\alpha+\varphi) = 1$.

Аналогично преобразованию произведения тригонометрических функций в сумму, можно найти максимальное значение t, продифференцировав полученное выражение по α:

$$\frac{dt}{d\alpha} = \frac{2}{\omega\cos\varphi}\frac{d(\sin\alpha\cos(\alpha+\varphi))}{d\alpha} = 0$$

Отсюда:

$$\cos\alpha\cos(\alpha+\varphi) - \sin\alpha\sin(\alpha+\varphi) = \cos(2\alpha+\varphi) = 0.$$

Таким образом:

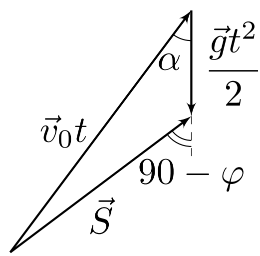
$$2\alpha+\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}.$$

Тогда максимальное время t_{max} составляет:

$$t_{max} = \frac{1-\sin\varphi}{\omega\cos\varphi} = \frac{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)}{\omega\cos\varphi} \approx 1.15 \text{ с.}$$

Третий способ:

Построим векторный треугольник перемещений для момента падения снаряда на горку. В указанный момент времени вектор перемещения образует угол φ с горизонтом, поэтому из теоремы синусов находим:



$$\frac{v_0 t}{\sin(90+\varphi)} = \frac{v_0 t}{\cos\varphi} = \frac{gt^2}{2\sin(90-\alpha-\varphi)} = \frac{gt^2}{2\cos(\alpha+\varphi)}.$$

Отсюда:

$$t = \frac{2v_0 \cos(\alpha+\varphi)}{g\cos\varphi} = \frac{2\sin\alpha\cos(\alpha+\varphi)}{\omega\cos\varphi}.$$

Исследование полученного выражения на максимум совпадает с проделанным в рамках первого способа решения. Таким образом:

$$t_{max} = \frac{1-\sin\varphi}{\omega\cos\varphi} = \frac{2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\varphi}{2}\right)}{\omega\cos\varphi} \approx 1.15 \text{ с.}$$

Четвёртый способ:

Решим задачу классическим способом – используя зависимости координат x и y от времени t:

$$x = v_{0x}t = v_0\sin\alpha t \qquad y = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2} = v_0\cos\alpha t - \frac{gt^2}{2}.$$

В момент падения камня на горку $y/x = \operatorname{tg}\varphi$. Отсюда:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} - \frac{gt}{2v_0\sin\alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} - \frac{\omega t}{2\sin^2\alpha}.$$

Введём переменную $z = \operatorname{ctg}\alpha$. Учитывая, что $1/\sin^2\alpha = 1+\operatorname{ctg}^2\alpha = 1+z^2$, получим:

$$t = \frac{2}{\omega}\frac{z-\operatorname{tg}\varphi}{1+z^2} = \frac{2f(z)}{\omega}.$$

Время t принимает значение, когда максимальное значение принимает функция $f(z)$. Определим величину z_0, соответствующую максимальному значению $f(z)$:

$$\frac{df(z_0)}{dz} = \frac{1+z_0^2-2z_0(z_0-\operatorname{tg}\varphi)}{(1+z_0^2)^2} = 0 \Rightarrow z_0^2 - 2z_0\operatorname{tg}\varphi - 1 = 0.$$

Решая квадратное уравнение, получим:

$$z_0 = \operatorname{tg}\varphi \pm \sqrt{\operatorname{tg}^2\varphi+1} \Rightarrow z_0 = \frac{1+\sin\varphi}{\cos\varphi}.$$

Таким образом:

$$f_{max} = f(z_0) = \frac{\left(\dfrac{1}{\cos\varphi}+\operatorname{tg}\varphi-\operatorname{tg}\varphi\right)}{1+\left(\dfrac{1+\sin\varphi}{\cos\varphi}\right)^2} = \frac{\cos\varphi}{2(1+\sin\varphi)}.$$

Максимальное значение $f(z)$ может быть найдено из без использования производной. Действительно:

$$\frac{z - \operatorname{tg}\varphi}{1 + z^2} = f(z) \Rightarrow z^2 f(z) - z + f(z) + \operatorname{tg}\varphi = 0.$$

Исследуем дискриминант полученного уравнения:

$$D = 1 - 4f(z)(f(z) + \operatorname{tg}\varphi) \geq 0$$

Максимально возможное значение $f(z)$ соответствует равному нулю дискриминанту. Отсюда:

$$4f^2(z) + 4f(z)\operatorname{tg}\varphi - 1 = 0 \Rightarrow f_{max} = -\frac{\operatorname{tg}\varphi}{2} + \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}}{2} = \frac{1 - \sin\varphi}{2\cos\varphi}.$$

Окончательно:

$$t_{max} = \frac{\cos\varphi}{\omega(1 + \sin\varphi)} = \frac{1 - \sin\varphi}{\omega\cos\varphi} \approx 1.15 \text{ с}.$$

Задача №10-Т2. Шайбами по барабану

Определим скорость барабана после соударения с шайбой 1. Поскольку трения между шайбами и барабаном нет – все их удары центральные, и движение всех тел остается поступательным, а проекции скоростей тел на ось, перпендикулярную линии центров, остаются постоянными в процессе соударения. Введём вдоль линии центров ось y, направленную от шайбы 1 к центру барабана. Пусть α – угол между вектором скорости шайбы 1 и линией центров. Запишем систему из закона сохранения импульса в проекции на ось y и закона сохранения энергии:

$$\begin{cases} mv_0\cos\alpha = Mv_{M1} + mv_{1y} \quad \text{ЗСИ} \\ \dfrac{mv_0^2\cos^2\alpha}{2} + \dfrac{mv_0^2\sin^2\alpha}{2} = \dfrac{mv_{1y}^2}{2} + \dfrac{mv_0^2\sin^2\alpha}{2} + \dfrac{Mv_{M1}^2}{2} \quad \text{ЗСЭ} \end{cases}$$

Решая записанную систему уравнений, находим:

$$v_{M1} = v_0\cos\alpha + v_{1y} = 2v_0\cos\alpha - \frac{Mv_{M1}}{m} \Rightarrow v_{M1} = \frac{2mv_0\cos\alpha}{m + M}.$$

Получим условие, при котором будет столкновение между шайбой 2 и барабаном. Если ввести ось z, направленную от шайбы 2 к центру барабана, то условие столкновения будет заключаться в том, что проекция скорости барабана относительно шайбы 2 на ось z будет отрицательной, т.е при условии:

$$v_{z(\text{отн})} = -v_{M1}\cos 2\alpha - v_0\cos\alpha = -v_0\cos\alpha\left(1 + \frac{2m\cos 2\alpha}{m + M}\right) < 0.$$

Поскольку $\cos\alpha > 0$, данное условие можно записать следующим образом:

$$1 + \frac{2m\cos 2\alpha}{m+M} = 1 + \frac{2m(2\cos^2\alpha - 1)}{m+M} > 0 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{S}{2R} > \sqrt{\frac{1}{4}\left(1 - \frac{M}{m}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

или же при условии:

$$S > \frac{R}{\sqrt{2}}.$$

Данное условие не выполнено при $S_1 = R/2$, поэтому столкновения между барабаном и шайбой 2 не будет, а значит $v_{M1} = u_1$:

$$u_1 = \frac{mv_0}{m+M}\frac{S_1}{R} = \frac{v_0}{3}.$$

Таким образом:

$$v_0 = 3u_1.$$

При $S_2 = R$ столкновение между барабаном и шайбой 2 будет, при этом $\alpha_2 = 60°$. В системе отсчёта, движущейся со скоростью $\vec{v}_{M1}$, соударение сводится к рассмотренному ранее. В данной системе отсчёта проекция v_{2z} скорости шайбы 2 на ось z равняется:

$$v_{2z} = v_0\cos\alpha + v_{M1}\cos 2\alpha = \frac{v_0}{2} + \frac{2v_0}{3}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{v_0}{6}.$$

В указанной системе отсчёта скорость барабана сразу после соударения равна:

$$v_{M2} = \frac{2mv_{2y'}}{m+M} = \frac{2v_0}{9}.$$

Обратим внимание, что проекция скорости $\vec{v}_{M2}$ на ось y является положительной, а значит, повторного столкновения барабана с шайбой 1 не будет.

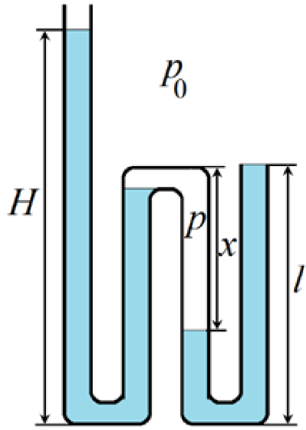
Для скорости u_2 имеем:

$$u_2 = \sqrt{v_{M1}^2 + v_{M2}^2 - 2v_{M1}v_{M2}\cos 2\alpha},$$

откуда:

$$u_2 = \frac{2\sqrt{13}u_1}{3}.$$

Задача №10-Т3. Загогулина



После заполнения водой второго слева вертикального участка, вода начнет стекать в третье колено, заполнит перемычку внизу между третьим и четвёртым и «отсечёт» воздух в третьем колене от атмосферного. Образуется воздушная «пробка», давление p внутри которой по мере заполнения четвёртого колена будет возрастать. Запишем условия равновесия (равенства давлений) для первого и второго вертикальных участков трубки:

$$p_0 + \rho g H = p + \rho g l. \tag{1}$$

Для третьего и четвертого

$$p_0 + \rho g l = p + \rho g(l - x).$$

Вычитая эти уравнения, получим

$$H - l = x.$$

Поскольку воздух внутри трубки начал сжиматься от объёма, соответствующего одному вертикальному участку, то по закону Бойля-Мариотта:

$$p_0 l S = p x S.$$

Из последних двух уравнений находим:

$$p = \frac{p_0 l}{H - l}.$$

Подставляем это в уравнение (1):

$$p_0 + \rho g H = \frac{p_0 l}{H - l} + \rho g l.$$

Избавимся от знаменателя в правой части и перегруппируем:

$$\rho g (H - l)^2 + p_0 (H - l) - p_0 l = 0.$$

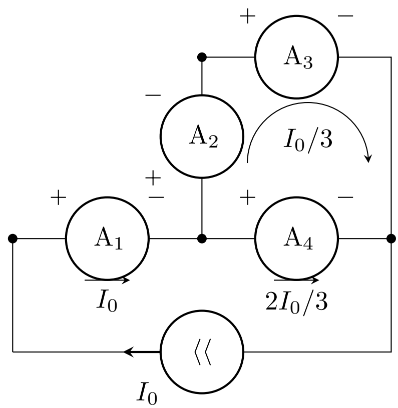
Обозначив для удобства $p_0/g = l_0$, решаем квадратное уравнение, оставляя только имеющий физический смысл положительный корень:

$$H = l + \frac{1}{2}\left(\sqrt{l_0^2 + 4 l_0 l} - l_0\right).$$

Объём налитой воды можно определить по суммарной длине трубы, занятой водой:

$$V = S(H + 3l - x) = 4Sl.$$

Задача №10-Т4. Источник стабильности



Рассмотрим малые значения силы тока I_0, при которых диод будет закрыт. В этом случае эквивалентная схема примет вид, изображённый на рисунке. Найдём токи, текущие через амперметры. Сила тока через A_1 равна I_0. Так как A_4 присоединён параллельно к паре амперметров A_2 и A_3, а его сопротивление вдвое меньше, чем суммарное сопротивление второго и третьего прибора, сила тока через A_4 будет равна $2I_0/3$. Сила тока, текущего через A_2 и A_3, следовательно, станет $I_0/3$. На графике, представленном в условии, участок идущий от начала координат описывается уравнением $I = 2I_0/3$, что соответствует результату, полученному для четвёртого амперметра.

Пусть r — сопротивление амперметра. Определим сначала напряжение открытия диода U_D. Так как характер зависимости тока через четвёртый амперметр от I_0 меняется при $I_0 = I_1$, это значение соответствует тому, что напряжение на диоде достигло U_D, но ток через диод ещё равен нулю (переход от горизонтального участка ВАХ прибора к вертикальному). Запишем условие равенства напряжения на диоде суммарному напряжению на первом и втором амперметре при $I_0 = I_1$

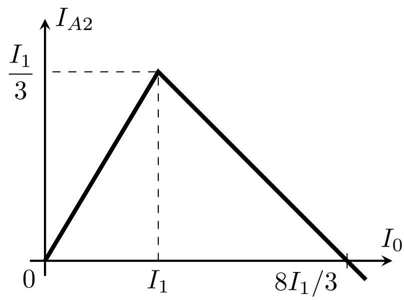
$$U_D = I_1 r + \frac{I_1}{3} \cdot r = \frac{4I_1 r}{3}.$$

Ситуация, когда ток через второй амперметр не течёт, во-первых, может произойти только при открытом диоде. Во-вторых, если ток через A_2 не течёт, то напряжения на A_3 и A_4 равны, что означает равенство токов через них:

$$I_{A3} = I_{A4} = \frac{I_0}{2}.$$

Соответственно, должны быть равны напряжения на первом амперметре и диоде. Поскольку в рассматриваемом случае $I_{A1} = I_{A4}$,

$$U_D = I_{A1} r \quad \Rightarrow \quad \frac{4I_1 r}{3} = \frac{I_0}{2} \cdot r \quad \Rightarrow \quad I_0 = \frac{8I_1}{3}.$$



Пока диод закрыт, то есть при $I_0 < I_1$, сила тока через второй амперметр равна $I_{A2} = I_0/3$. Если $I_0 > I_1$, напряжение на диоде постоянно и равно $U_D = 4I_1 r/3$. Чтобы построить ту часть искомого графика, которая соответствует открытому диоду, можно рассуждать одним из двух способов.

Способ 1. ВАХ диода состоит из двух прямолинейных участков — горизонтального и вертикального. Поэтому, если находиться в пределах только одного участка (в данном случае, вертикального), диод можно считать линейным элементом. Остальные элементы цепи, представленной в условии, тоже имеют прямолинейные ВАХ, то есть также являются линейными. Следовательно, зависимость силы тока на втором амперметре от I_0 при $I_0 > I_1$ является линейной. Отсюда, учитывая, что график этой зависимости должен проходить через точки $(I_1; I_1/3)$ и $(8I_1/3; 0)$, получим график, изображённый на рисунке.

Способ 2 Расставим токи в цепи при $I_0 > I_1$, учитывая, что напряжение на диоде равно U_D. Пусть сила тока через второй амперметр равна I_{A2}. Тогда, исходя из равенства суммы напряжений на A_1 и A_2 напряжению на диоде, получим, что ток через первый амперметр

$$I_{A1} = \frac{U_D - I_{A2} r}{r} = \frac{U_D}{r} - I_{A2}.$$

Соответственно, токи через A_3 и A_4 будут равны

$$I_{A4} = I_{A1} - I_{A2} = \frac{U_D}{r} - 2I_{A2},$$

$$I_{A3} = I_0 - I_{A4} = I_0 - \frac{U_D}{r} + 2I_{A2}.$$

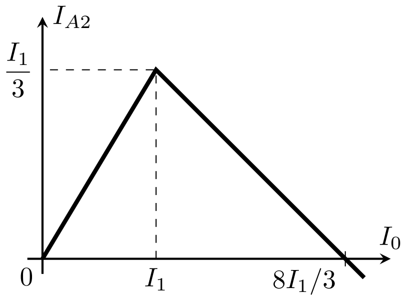
Так как сумма напряжений на A_2 и A_3 должна быть равна напряжению на A_4,

$$I_{A4}r = I_{A2}r + I_{A3}r \quad \Rightarrow \quad \frac{U_D}{r} - 2I_{A2} = I_0 - \frac{U_D}{r} + 3I_{A2}.$$

Отсюда, используя равенство $U_D = 4I_1 r/3$, найдём, что

$$I_{A2} = \frac{2U_D}{5r} - \frac{I_0}{5} = \frac{8I_1}{15} - \frac{I_0}{5}.$$

Далее строим графики зависимостей $I_{A2} = I_0/3$ при $I_0 < I_1$ и $I_{A2} = 8I_1/15 - I_0/5$ при $I_0 > I_1$ и получаем тот же рисунок, что и в Способе 1.

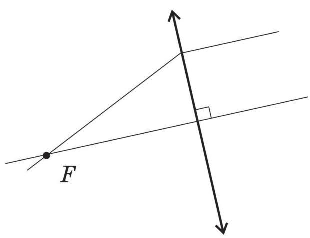


Задача №10-Т5. В фокусе внимания

Возможны два случая – линза собирающая и линза рассеивающая. Рассмотрим каждый из случаев отдельно.

Собирающая линза.

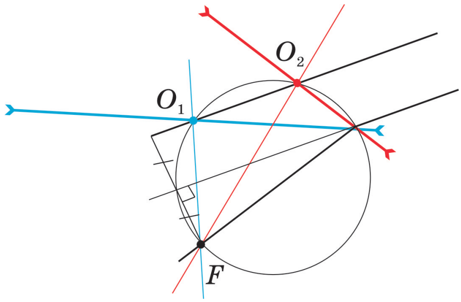
Луч, прошедший через фокус собирающей линзы, после преломления в ней идёт параллельно главной оптической оси. Таким образом, из рисунка нам известно направление главной оптической оси (далее – ГОО) и одна из её точек (F). По этим данным восстанавливаем положение ГОО. Для этого проводим через F прямую, параллельную лучу после преломления. Плоскость линзы перпендикулярна ГОО и нам



известна одна из её точек - точка, где преломляется луч. Положение плоскости линзы восстанавливаем проведением перпендикуляра к ГОО из точки преломления луча.

Рассеивающая линза.

Фокус линзы F, её оптический центр O и точка преломления луча образуют прямоугольный треугольник. Построим на отрезке (как на диаметре), соединяющем фокус и точку преломления луча, окружность. Оптический центр должен лежать на этой окружности. Из формулы тонкой линзы (или используя тот факт, что параллельный пучок лучей после преломления на рассеивающей линзе идёт так, что продолжения пересекаются в одной точке фокальной плоскости) можно показать, что луч, прошедший через фокус рассеивающей линзы, после преломления идёт так, как будто прошёл через половинный фокус. Продлим луч, который преломился в линзе – он должен делить пополам отрезок OF. Построим вспомогательный луч, параллельный продолжению преломленного луча и находящийся в два раза дальше от точки F. Он пройдет через оптический центр линзы, не отклоняясь от своего первоначального направления. Таким образом, оптический центр линзы может находится в точках пересечения вспомогательного луча с окружностью. В нашем случае таких пересечений два (точки O_1 и O_2). Значит, возможны два варианта расположения рассеивающей линзы. В каждом варианте плоскость линзы проходит через точку преломления исходного луча и соответствующий оптический центр.



Отметим, что в случае рассеивающей линзы для двух полученных решений известный нам луч идет под разными углами к ГОО линзы, которые по построению связаны между собой. Если обозначить за $_1$ угол между лучом и FO_1 и за $_2$ — угол между лучом и FO_2, то можно показать, что $\mathrm{tg}\,_1 \cdot \mathrm{tg}\,_2 = 1/2$. Следовательно, только один из этих лучей может являться параксиальным — ведь если один из этих углов мал ($\mathrm{tg}\,1$), то другой должен иметь достаточно большое значение тангенса. Может быть и так, что оба угла не являются малыми. Поэтому только свойство линзы, указанное в «Примечании» условия, позволяет нам считать, что оба решения корректны.