9 класс

Первый день

9.1. Велодорожка состоит из двух участков: сначала идёт асфальтовый, а затем песчаный. Петя и Вася стартовали порознь (сначала Петя, а затем Вася), и каждый проехал всю дорожку. Скорость каждого мальчика на каждом из двух участков была постоянной. Оказалось, что они поравнялись в середине асфальтового участка, а также в середине песчаного. Кто из мальчиков затратил на всю дорожку меньше времени?

9.2. Дан бумажный треугольник, длины сторон которого равны 5 см, 12 см и 13 см. Можно ли разрезать его на несколько (больше одного) многоугольников, у каждого из которых площадь (измеренная в см^2) численно равна периметру (измеренному в см)?

9.3. Дано натуральное число n. На клетчатой доске $2n \times 2n$ расставили $2n$ ладей так, что никакие две не стоят в одной горизонтали или одной вертикали. После этого доску разрезали по линиям сетки на две связных части, симметричных друг другу относительно центра доски. Какое наибольшее количество ладей могло оказаться в одной из частей? (Клетчатая фигура называется *связной*, если по этой фигуре от любой её клетки можно добраться до любой другой, переходя каждый раз в соседнюю по стороне клетку.)

9.4. Даны натуральные числа a, b и c. Ни одно из них не кратно другому. Известно, что число $abc+1$ делится на $ab-b+1$. Докажите, что $c \geqslant b$.

9.5. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность γ. Оказалось, что окружности, построенные на отрезках AB и CD как на диаметрах, касаются друг друга внешним образом в точке S. Пусть точки M и N — середины отрезков AB и CD соответственно. Докажите, что перпендикуляр ℓ к прямой MN, восставленный в точке M, пересекает прямую CS в точке, лежащей на γ.

9 класс

Первый день

9.1. Велодорожка состоит из двух участков: сначала идёт асфальтовый, а затем песчаный. Петя и Вася стартовали порознь (сначала Петя, а затем Вася), и каждый проехал всю дорожку. Скорость каждого мальчика на каждом из двух участков была постоянной. Оказалось, что они поравнялись в середине асфальтового участка, а также в середине песчаного. Кто из мальчиков затратил на всю дорожку меньше времени?

9.2. Дан бумажный треугольник, длины сторон которого равны 5 см, 12 см и 13 см. Можно ли разрезать его на несколько (больше одного) многоугольников, у каждого из которых площадь (измеренная в см^2) численно равна периметру (измеренному в см)?

9.3. Дано натуральное число n. На клетчатой доске $2n \times 2n$ расставили $2n$ ладей так, что никакие две не стоят в одной горизонтали или одной вертикали. После этого доску разрезали по линиям сетки на две связных части, симметричных друг другу относительно центра доски. Какое наибольшее количество ладей могло оказаться в одной из частей? (Клетчатая фигура называется *связной*, если по этой фигуре от любой её клетки можно добраться до любой другой, переходя каждый раз в соседнюю по стороне клетку.)

9.4. Даны натуральные числа a, b и c. Ни одно из них не кратно другому. Известно, что число $abc + 1$ делится на $ab - b + 1$. Докажите, что $c \geqslant b$.

9.5. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность γ. Оказалось, что окружности, построенные на отрезках AB и CD как на диаметрах, касаются друг друга внешним образом в точке S. Пусть точки M и N — середины отрезков AB и CD соответственно. Докажите, что перпендикуляр ℓ к прямой MN, восставленный в точке M, пересекает прямую CS в точке, лежащей на γ.

10 класс

Первый день

10.1. В таблице 6×6 изначально записаны нули. За одну операцию можно выбрать одну клетку и заменить число, стоящее в ней, на любое целое число. Можно ли за 8 операций получить таблицу, в которой все 12 сумм чисел в строках и столбцах будут различными положительными числами?

10.2. Дан бумажный треугольник, длины сторон которого равны 5 см, 12 см и 13 см. Можно ли разрезать его на несколько (больше одного) многоугольников, у каждого из которых площадь (измеренная в см^2) численно равна периметру (измеренному в см)?

10.3. В городе N прошли 50 городских олимпиад по разным предметам, при этом в каждой из этих олимпиад участвовало ровно 30 школьников, но не было двух олимпиад с одним и тем же составом участников. Известно, что для любых 30 олимпиад найдётся школьник, который участвовал во всех этих 30 олимпиадах. Докажите, что найдётся школьник, который участвовал во всех 50 олимпиадах.

10.4. Даны натуральные a, b, c такие, что $a > 1$, $b > c > 1$, а число $abc+1$ делится на $ab-b+1$. Докажите, что b делится на a.

10.5. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота BD и отмечена точка пересечения высот H. Серединный перпендикуляр к отрезку HD пересекает окружность, описанную около треугольника BCD, в точках P и Q. Докажите, что $\angle APB + \angle AQB = 180^\circ$.

10 класс

Первый день

10.1. В таблице 6×6 изначально записаны нули. За одну операцию можно выбрать одну клетку и заменить число, стоящее в ней, на любое целое число. Можно ли за 8 операций получить таблицу, в которой все 12 сумм чисел в строках и столбцах будут различными положительными числами?

10.2. Дан бумажный треугольник, длины сторон которого равны 5 см, 12 см и 13 см. Можно ли разрезать его на несколько (больше одного) многоугольников, у каждого из которых площадь (измеренная в см^2) численно равна периметру (измеренному в см)?

10.3. В городе N прошли 50 городских олимпиад по разным предметам, при этом в каждой из этих олимпиад участвовало ровно 30 школьников, но не было двух олимпиад с одним и тем же составом участников. Известно, что для любых 30 олимпиад найдётся школьник, который участвовал во всех этих 30 олимпиадах. Докажите, что найдётся школьник, который участвовал во всех 50 олимпиадах.

10.4. Даны натуральные a, b, c такие, что $a > 1$, $b > c > 1$, а число $abc+1$ делится на $ab-b+1$. Докажите, что b делится на a.

10.5. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота BD и отмечена точка пересечения высот H. Серединный перпендикуляр к отрезку HD пересекает окружность, описанную около треугольника BCD, в точках P и Q. Докажите, что $\angle APB + \angle AQB = 180^\circ$.

11 класс

Первый день

11.1. Можно ли число 2023 представить в виде суммы трёх натуральных чисел a, b, c таких, что a делится на $b+c$ и $b+c$ делится на $b-c+1$?

11.2. Даны различные вещественные числа a_1, a_2, a_3 и b. Оказалось, что уравнение $(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)=b$ имеет три различных вещественных корня c_1, c_2, c_3. Найдите корни уравнения $(x+c_1)(x+c_2)(x+c_3)=b$.

11.3. В городе N прошли 50 городских олимпиад по разным предметам, при этом в каждой из этих олимпиад участвовало ровно 30 школьников, но не было двух олимпиад с одним и тем же составом участников. Известно, что для любых 30 олимпиад найдётся школьник, который участвовал во всех этих 30 олимпиадах. Докажите, что найдётся школьник, который участвовал во всех 50 олимпиадах.

11.4. На доску записывают пары чисел. Сначала на доску записали пару чисел $(1,2)$. Если на доске написана пара чисел (a,b), то на доску можно дописать пару $(-a,-b)$, а также пару $(-b,a+b)$. Кроме того, если на доске написаны пары чисел (a,b) и (c,d), то на доску можно дописать пару $(a+c,b+d)$. Могла ли через некоторое время на доске оказаться пара $(2022,2023)$? Порядок чисел в паре существенен, например, пары чисел $(1,2)$ и $(2,1)$ считаются различными.

11.5. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC проведена высота AH, медиана AM, а также отмечен центр O его описанной окружности ω. Отрезки OH и AM пересекаются в точке D, прямые AB и CD — в точке E, прямые BD и AC — в точке F. Лучи EH и FH пересекают окружность ω в точках X и Y. Докажите, что прямые BY, CX и AH пересекаются в одной точке.

11 класс

Первый день

11.1. Можно ли число 2023 представить в виде суммы трёх натуральных чисел a, b, c таких, что a делится на $b+c$ и $b+c$ делится на $b-c+1$?

11.2. Даны различные вещественные числа a_1, a_2, a_3 и b. Оказалось, что уравнение $(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)=b$ имеет три различных вещественных корня c_1, c_2, c_3. Найдите корни уравнения $(x+c_1)(x+c_2)(x+c_3)=b$.

11.3. В городе N прошли 50 городских олимпиад по разным предметам, при этом в каждой из этих олимпиад участвовало ровно 30 школьников, но не было двух олимпиад с одним и тем же составом участников. Известно, что для любых 30 олимпиад найдётся школьник, который участвовал во всех этих 30 олимпиадах. Докажите, что найдётся школьник, который участвовал во всех 50 олимпиадах.

11.4. На доску записывают пары чисел. Сначала на доску записали пару чисел $(1,2)$. Если на доске написана пара чисел (a,b), то на доску можно дописать пару $(-a,-b)$, а также пару $(-b,a+b)$. Кроме того, если на доске написаны пары чисел (a,b) и (c,d), то на доску можно дописать пару $(a+c,b+d)$. Могла ли через некоторое время на доске оказаться пара $(2022,2023)$? Порядок чисел в паре существенен, например, пары чисел $(1,2)$ и $(2,1)$ считаются различными.

11.5. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC проведена высота AH, медиана AM, а также отмечен центр O его описанной окружности ω. Отрезки OH и AM пересекаются в точке D, прямые AB и CD — в точке E, прямые BD и AC — в точке F. Лучи EH и FH пересекают окружность ω в точках X и Y. Докажите, что прямые BY, CX и AH пересекаются в одной точке.