# 7 класс

## Теоретический тур

### Задача №7-Т1. В ванной

Пусть длинная сторона плитки имеет размер $a$, а короткая – $b$. Поскольку плитку резали только у стены с дверным проёмом, по рисунку можно найти соотношение между $a$ и $b$. На 4 длинных стороны плитки приходится 10 коротких сторон (коврик перед унитазом может закрывать только одну целую плитку, поскольку его ширина равна $2b$). То есть

$$\frac{a}{b} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}.$$

Улитка из $A$ до встречи должна пройти путь $3a$, улитка из $B$ – путь $(a + 7b)$. Значит условие встречи можно записать в виде уравнения:

$$\frac{a + 7b}{u} - \frac{3a}{u} = \Delta t.$$

С учетом того, что $a = 2.5b$, получаем:

$$b = \frac{u\Delta t}{2} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot \frac{200}{60}\ \text{см} = 20\ \text{см}. \quad a = 2.5b = 50\ \text{см}.$$

Теперь, зная размеры одной плитки, можно посчитать и площадь всей ванной комнаты, разбив её на простые части (например, на прямоугольники и прямоугольные треугольники с известными сторонами):

$$S = 4a(a + 9b) + 11ab + \frac{5}{2}ab = 4a^2 + 49.5ab = 5.95\ \text{м}^2.$$

PS: Разбиение на площади может быть и другим, соответственно формула может быть другой (например, $S = 59.5ab$). Но ответ, конечно, при этом измениться не должен.

### Задача №7-Т2. Стадион МФТИ

Эффективная длина круга первой дорожка складывается из двух прямолинейных участков и двух дуг половинок окружностей.

$$L_1 = 2\pi R_1 + 2l \approx 400\ \text{м}.$$

Длины дорожек имеют различия только на криволинейных участках. Для первой и второй дорожек на трёх кругах разность длин:

$$\Delta l_{12} = 3(L_2 - L_1) = 3(2\pi(R_1 + d) - 2\pi R_1) = 6\pi d \approx 23\ \text{м}.$$

Легко заметить, что:

$$\Delta l_{12} = \Delta l_{23} = \Delta l_{34} = 6\pi d \approx 23 \text{ м}.$$

Для расчёта средней скорости на дистанции 2400 м нельзя точно определить время. Например, показание часов 13:00 может соответствовать любому моменту от 13:00:00 до 13:00:59:99... Тогда время забега атлета принадлежит интервалу от 12 до 14 минут. Эти границы позволяют найти наименьшее и наибольшее значения средней скорости.

$$v_{\min} = \frac{2400 \text{ м}}{14 \cdot 60 \text{ с}} \approx 2.86 \text{ м/с}, \quad v_{\min} = \frac{2.4 \text{ км} \cdot 60}{14 \text{ ч}} \approx 10.3 \text{ км/ч};$$

$$v_{\max} = \frac{2400 \text{ м}}{12 \cdot 60 \text{ с}} \approx 3.33 \text{ м/с}; \quad v_{\max} = \frac{2.4 \text{ км} \cdot 60}{12 \text{ ч}} \approx 12 \text{ км/ч}.$$

## Задача №7-Т3. Шоколад и карамель

Запишем формулу средней плотности:

$$\rho = \frac{m_1 + m_2}{V_1 + V_2}.$$

Найдём массу шоколада $m_1 = \rho_1 V_1 = \rho_1 \cdot 0.6V_1$, объём карамели $V_2 = \mu_2 t$, массу карамели $m_2 = \rho_2 V_2 = \rho_2 \mu t$.

После подстановки получим:

$$1.1\rho_1 = \frac{0.6\rho_1 V + \rho_2 \mu t}{0.6V + \mu t}.$$

Выразим и найдём время

$$t = \frac{0.6V \cdot 0.1V}{\mu(\rho_2 - 1.1\rho_1)} = 9.6 \text{ мин}.$$

Проверим возможность ответа:

$$V_2 = \mu t = 0.60 \frac{\text{л}}{\text{мин}} \cdot 9.6 \text{ мин} = 5.76 \text{ л} < 6.4 \text{ л} = 0.4V.$$

Т.е. карамель не выливалась!

## Задача №7-Т4. Догонялки

Введём обозначения: $T_1$ — всё время в пути первого автомобиля, $T_2$ — всё время в пути второго автомобиля, $\tau_2$ — время движения второго автомобиля до остановки. Согласно условию задачи:

$$T_1 = \tau_2 + \Delta t;$$

$$T_2 = t_2 = 14 \text{ мин.}$$

Из графика (точка излома): $\tau_2 = 2$ мин. В течении этого времени расстояние между автомобилями меняется с относительной скоростью $(v_1 - v_2)$. За 2 минуты оно станет равным (из графика) $S_1 = 1.2$ км. Получаем первое уравнение связи скоростей:

$$S_1 = (v_1 - v_2)\tau_2.$$

После этого из графика видно, что за следующие 2 минуты первый автомобиль уехал от стоящего второго ещё на

$$S_2 = 4.2 \text{ км} - 3.2 \text{ км} = 3 \text{ км}.$$

Это нам позволяет найти скорость первого автомобиля:

$$v_1 = \frac{3 \text{ км}}{2 \text{ мин.}} = 1.5 \text{ км/мин.}$$

тогда из уравнения для связи скоростей можно найти скорость второго автомобиля:

$$v_2 = 1.5\ \frac{\text{км}}{\text{мин.}} - \frac{1.2 \text{ км}}{2 \text{ мин.}} = 0.9 \text{ км/мин.}$$

Теперь запишем формулы для расчёта пути из $A$ в $B$:

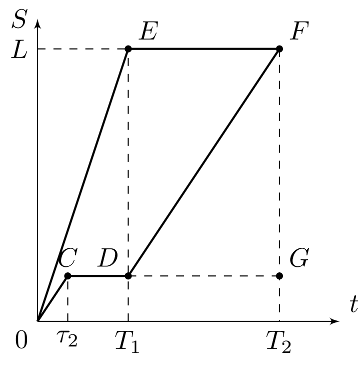
$$L = v_1 T_1 = v_1(\tau_2 + \Delta t);$$

$$L = v_2(T_2 - \Delta t).$$

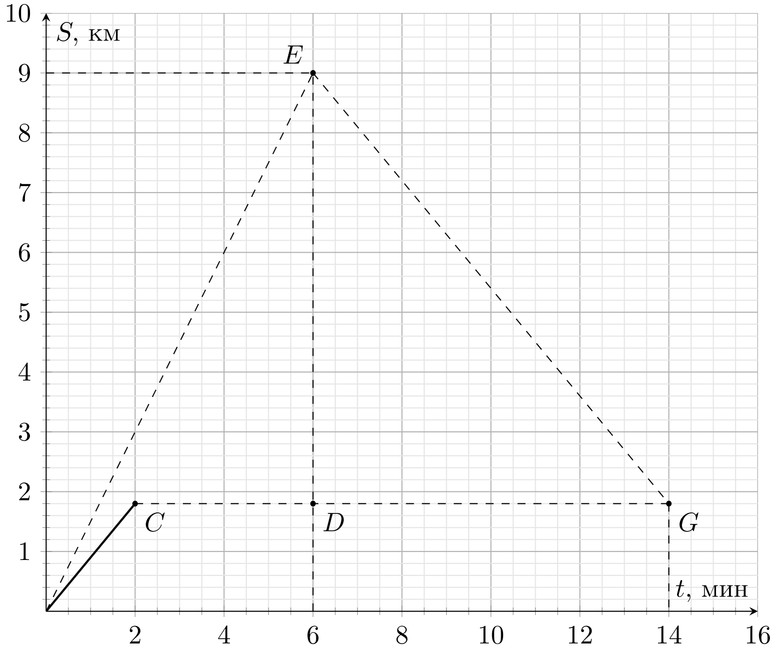
Приравняем правые части уравнений и найдём время остановки:

$$\Delta t = \frac{v_2 T_2 - v_1 T_1}{v_1 + v_2} = 4 \text{ мин.}$$

Также $\Delta t$ можно найти графически. На рисунке качественно показан график движения автомобилей. Рассмотрим построение графика согласно условию задачи.




Известно, что первый автомобиль едет быстрее второго (угловой коэффициент прямой $OE$ больше, чем у прямой $OC$) с постоянной скоростью $v_1$ вплоть до пункта $B$ (точка $E$), а затем останавливается (участок $EF$). Второй автомобиль некоторое время движется с постоянной скоростью $v_2$ (участок $OC$), останавливается (участок $CD$), и когда первый автомобиль достигает пункта $B$, вновь продолжает движение (точка $D$) с той же скоростью $v_2$ (угловые коэффициенты прямых $OC$ и $DF$ совпадают). В момент времени $t_2 = 14$ мин. автомобили поравнялись (точка $F$). Зная скорости автомобилей и время движения второго до остановки, можно определить положение точки $G$ и провести через неё прямую $GE$ с угловым коэффициентом $-v_2$ до пересечения с графиком движения первого автомобиля. На рисунке ниже показано это построение. Время остановки второго автомобиля 4 мин легко найти из построения.




Теперь можно найти длину пути:

$$L = v_2(T_2 - \Delta t) = 9 \text{ км.}$$

Если решать с использованием графика, то из построения также легко найти расстояние между пунктами $A$ и $B$ — 9 км.